§5.3 Diagonalisation

Rappel : $T : V \to V$ linéaire ($\dim V = n$)

est dite diagonalisable s'il existe B base (ord.) de V telle que $[T]_{BB}$ soit une matrice diagonale

càd $[T]_{BB} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

sont "faciles" à étudier

avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$ (quelconques)

(et ces λ_i sont les valeurs propres de T)

Si $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, on dit que A est diagonalisable si $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'est.

Rem 5.3.1 : T est diagonalisable $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $A = [T]_{\mathcal{CC}}$ est diagonalisable $\forall$ base $\mathcal{C}$.

$\Leftrightarrow$ A est semblable à une matrice diagonale

$\Leftrightarrow$ càd il existe une matrice inversible P $n \times n$ et D diagonale $n \times n$ telles que

$$A = P D P^{-1}$$

(équivaut à $P^{-1} A P = D$)

(équivaut à $A = S^{-1} D S$ avec $S = P^{-1}$)

En effet par ✱ on a que pour $\mathcal{B}$ base de V $\mathcal{C}$

$$\boxed{[T]_{\mathcal{C}\mathcal{C}} \overset{✱}{=} P_{\mathcal{C}B} [T]_{BB} P_{B\mathcal{C}}}$$

$$\boxed{A = [T]_{\mathcal{C}\mathcal{C}} = P \cdot D \cdot P^{-1}}$$

où $P = P_{\mathcal{C}B}$ et $P^{-1} = P_{B\mathcal{C}}$

Utilité 5.3.2 :

Si A est diagonalisable, on peut calculer A^k plus facilement (avec $k \in \mathbb{N}$)

en effet si $\exists$ P inversible
D diagonale t.q $A = PDP^{-1}$

alors $A^2 = (PD\overbrace{P^{-1})(P}^{I_n}DP^{-1})$

$$A^2 = PD^2P^{-1}$$

...

$$\boxed{A^k = PD^kP^{-1}}$$

$$\boxed{A^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & 0 \\ & \lambda_2^k & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}}$$

Thm de diagonalisation 5.3.3

$T : V \to V$ t.L $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ b.o. de V

et $A = [T]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$. Alors

1) T est diagonalisable $\Leftrightarrow$ T possède n vecteurs propres linéairement indépendants
(A) (A)

$\Leftrightarrow$ V possède une base $\mathcal{C}$ formée de vecteurs propres pour T.
(A)

Une telle base $\mathcal{C}$ est appelée base propre pour T
pour A

2) Si A (ou T) possède n valeurs propres distinctes alors A est diagonalisable.

3) Soit $Spc(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$ avec $p \leq n$
l'ens. des val. propres réelles de A
et supp. $\lambda_i \neq \lambda_j$ pour $i \neq j$

Notons m_i la multiplicité (alg.) de λ_i

(càd λ_i est zéro d'ordre m_i
pour le pol. caract. $c_A(t)$)

Alors A est diagonalisable $\Leftrightarrow$

$$\boxed{m_i = \dim(E_{\lambda_i})} \qquad \forall i = 1, \dots, p$$

(càd multiplicité algébrique de λ_i
= multiplicité géométrique de λ_i)

(rappel : $1 \leq \dim(E_{\lambda_i}) \leq m_i \leq n$)

Alors A est diagonalisable $\Leftrightarrow$

$$\boxed{\dim(E_{\lambda_1}) + \cdots + \dim(E_{\lambda_p}) = n = \dim V}$$

(NB : $m_1 + \cdots + m_p = n$)

Fin Thm 5.3.3.

Exemples 5.3.4 :

1) Toute matrice diagonale est diagonalisable (banal)

2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable

car $\mathrm{Spc}(A) = \{0\}$ (exo)

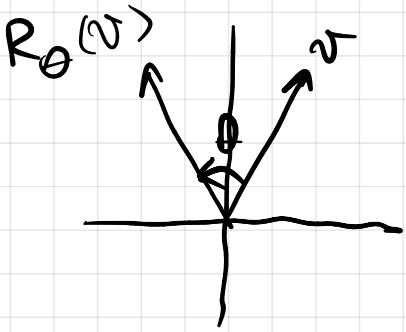
$C_A(t) = t^2$ $\quad m_0 = 2$

$\mathrm{Ker}(A) = E_0 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ $\quad \dim(E_0) = 1.$

3) $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

n'a de valeurs propres (réelles)

que si $\sin(\theta) = 0$ (exo)



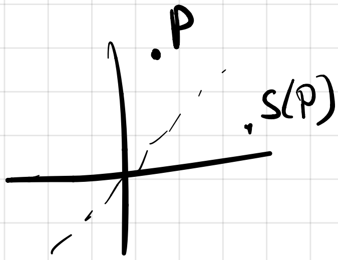
$R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$v \mapsto R_\theta(v)$

$R_\theta(v) = \lambda v \quad \Rightarrow |\lambda| = 1$

$\Rightarrow \quad \theta = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}.$

Sinon R_θ n'est pas diagonalisable (sur $\mathbb{R}$)
(mais elle est sur $\mathbb{C}$).

4) $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ symétrie axiale



exo : diagonalisable

5) $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrice de Fibonacci

est diagonalisable <u>sur $\mathbb{R}$</u>

et on pourra donc

calculer "facilement"

les puissances de F : F^n.

$\boxed{\text{Recette}}$

Marche à suivre 5.3.4

(pour décider si $T : V \to V$ est diagonalisable et effectuer la diagonalisation)

Soit $T : V \to V$ linéaire $(\dim(V) = n)$

0) choisir une base $\mathcal{C}$ de V et écrire $A = [T]_{\mathcal{C}\mathcal{C}} \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$

(Si on a déjà A sauter l'étape 0))

1) Trouver $Spc(A)$ (les évent. val. propres de A)

via le polynôme caractéristique

(ou en donnant un vecteur propre pour chaque valeur propre) en faisant attention à factoriser $c_A(t)$ le plus possible.

i) trouver les zéros de $c_A(t)$

$$\mathrm{Spc}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$$

$\lambda_i \in \mathbb{R}$

λ_i tous différents

ii) trouver la multiplicité m_i de chaque λ_i

(**NB** : Si, $\mathrm{Spc}(A) = \emptyset$ (pas de valeur propre réelle) on s'arrête et A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.)

2) Pour chaque $i \in \{1, \dots, p\}$ calculer $\dim(E_{\lambda_i})$ à l'aide du thm du rang :

$$\dim(E_{\lambda_i}) = n - \underbrace{\mathrm{rg}(A - \lambda_i I_n)}_{}$$

le nombre de pivots de $A - \lambda_i I_n$

Rappel

$$\left(E_{\lambda_i} = \mathrm{Ker}(A - \lambda_i I_n) \right)$$

3) Test de diagonalisabilité :

$$A \text{ diagonalis.} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i}) = n$$

Si le test est passé on continue :

4) $\forall \lambda_i$ on résoud le système

$$(A - \lambda_i I_n)x = 0$$

et cela donnera une base B_i (ord) du noyau

$E_{\lambda_i} = \mathrm{Ker}(A - \lambda_i I_n)$.

5) Former la matrice P avec les vecteurs propres ci-dessous (en colonne) dans l'ordre $B_1, B_2, \dots, B_p$

$B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_p$ est une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A.

6) Former la matrice diagonale D

en mettant les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ (avec répétition m_i si nécessaire) en faisant attention à

i) mettre les λ_i dans le même ordre que les vecteurs propres choisis pour P

ii) comptées avec multiplicité m_i

7) Alors on a

$$P^{-1}AP = D = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & & & & \\ 0 & \lambda_1 & & & & & 0 \\ & & \lambda_2 & 0 & & & \\ & & 0 & \lambda_2 & & & \\ & 0 & & & \ddots & & \\ & & & & & \lambda_p & 0 \\ & & & & & 0 & \lambda_p \end{pmatrix} \\ \quad m_1 \qquad\qquad m_2 \qquad\qquad m_p \end{array}$$

et donc

$$A = PDP^{-1}$$

(⚠ si on le demande, il faut aussi calculer P^{-1})

Fin Recette 5.3.4

Exemple 5.3.5

Soit $T : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ donnée par

$$T(at^2+bt+c) = (a+3(c+b))t^2 - (3a+5b+3c)t + 3(a+b)+c$$

T est linéaire ✓

0) $\mathcal{C} = (1, t, t^2)$ base ord. de $\mathbb{P}^2$

$A = [T]_{\mathcal{C}\mathcal{C}}$

$T(1) = 3t^2 - 3t + 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}}$

$T(t) = 3t^2 - 5t + 3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}}$

$T(t^2) = t^2 - 3t + 3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{C}}$

1) $A = [T]_{\mathcal{C}\mathcal{C}} = \left([T(1)]_{\mathcal{C}} \,\middle|\, [T(t)]_{\mathcal{C}} \,\middle|\, [T(t^2)]_{\mathcal{C}} \right)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$c_A(t) = \det(A - tI_3)$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1-t & 3 & 3 \\ -3 & -5-t & -3 \\ 3 & 3 & 1-t \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{exo}}{\overset{\dots}{=}} -(t+2)^2(t-1)$$

$\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{\underbrace{-2}_{\text{double}}, \underbrace{1}_{\text{simple}}\}$

$\lambda_1 = 1 \quad m_1 = 1$

$\lambda_2 = -2 \quad m_2 = 2$

2) $\dim(E_1) = ?$ $\dim(E_{-2}) = ?$

$$E_1 = \mathrm{Ker}(A - I_3) = \mathrm{Ker}\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -3 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}}_{C}$$

$$\left(\begin{array}{l} rg(C) = 2 \\ \text{TdR} \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(A - I_3)) = 3 - 2 = 1 \\ \dim(E_1) = 1 \end{array} \right)$$

$$E_{-2} = \mathrm{Ker}(A + 2I_3) = \mathrm{Ker}\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}}_{D}$$

$rg(D) = 1$

TdR $\Rightarrow \dim E_{-2} = 3 - 1 = 2$

$$\dim(E_{-2}) = 2$$

et donc

$$3 = \dim(\mathbb{R}^2) = \underbrace{\dim(E_{-2})}_{2} + \underbrace{\dim(E_1)}_{1}$$

$\Rightarrow$ A est diagonalisable.

Suite la semaine pro.